

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Dans ce chapitre, on travaille seulement avec le corps de base $\mathbb{R}$ — généralisation à $\mathbb{C}$ en deuxième année. Les lettres $n, p, q \dots$ désignent des entiers naturels non nuls.

1 PRODUIT SCALAIRE, NORME ET ORTHOGONALITÉ

1.1 PRODUIT SCALAIRE

Définition (Produit scalaire, espace préhilbertien réel, espace euclidien)

• Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle *produit scalaire sur E* toute forme bilinéaire symétrique définie positive, i.e. toute application $(\cdot|\cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$:

- 1) *bilinéaire* : $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda x + \mu y|z) = \lambda(x|z) + \mu(y|z)$ et $(x|\lambda y + \mu z) = \lambda(x|y) + \mu(x|z)$;
- 2) *symétrique* : $\forall x, y \in E, (y|x) = (x|y)$;
- 3) *définie* : $\forall x \in E, (x|x) = 0 \implies x = 0_E$;
- 4) *positive* : $\forall x \in E, (x|x) \geq 0$.

Le produit scalaire $(x|y)$ est aussi parfois noté $\langle x|y \rangle$, $\langle x, y \rangle$ ou encore $x \cdot y$.

• Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé un *espace préhilbertien réel*. Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé un *espace euclidien*.

🔗 🔗 🔗 **Explication** Par chance, le produit scalaire usuel avec lequel vous avez l'habitude de travailler sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est un produit scalaire au sens de cette définition. La démarche que nous initions ici n'en est pas moins déroutante : en début d'année, nous avons défini le produit scalaire au moyen de la formule « $(\vec{u}|\vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$ », qui supposait connues les notions de norme et d'angle ; nous venons ci-dessus de définir le produit scalaire indépendamment de ces deux notions. Le comble dans cette histoire, c'est que ce sont les notions de norme et d'angle qui vont découler maintenant du produit scalaire — et non l'inverse.

⚡ ⚡ ⚡ **Attention !** Il existe de nombreux produits scalaires dans le plan ou l'espace : simplement, jusqu'ici, nous en avons privilégié un. Par exemple, l'application $(\cdot|\cdot) : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \longmapsto 3xx' + xy' + yx' + yy' \end{cases}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, distinct du produit scalaire usuel.

En effet Symétrie et bilinéarité évidentes. Pour le reste : $(u|u) = 3x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + (x+y)^2 \geq 0$ pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. De plus $(u|u) = 0$ si et seulement si $x = x + y = 0$, i.e. $x = y = 0$, ou encore $u = (0, 0)$.

🔗 🔗 🔗 **En pratique** Pour montrer la bilinéarité d'un produit scalaire potentiel, la linéarité par rapport à une variable seulement est suffisante, si l'on a pris la peine de démontrer avant la symétrie.

Petite remarque au passage : $(x|0_E) = (0_E|x) = 0$ pour tout $x \in E$, par bilinéarité du produit scalaire.

Exemple (Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$) L'application $((x_k)_{1 \leq k \leq n}, (y_k)_{1 \leq k \leq n}) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k y_k$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé son *produit scalaire canonique*. Il est équivalent de le définir sous forme matricielle : $\begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) & \longmapsto {}^tXY \end{cases}$.

En effet Symétrie et bilinéarité sont évidentes. Pour le caractère défini et la positivité, soit $X = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$.

Alors $(X|X) = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0$, et l'égalité n'a lieu que si x_k est nul pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, i.e. si $X = 0$.

Exemple Soient $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ **distincts**. L'application $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

En effet Symétrie évidente. Du coup, pour la bilinéarité, la linéarité par rapport à la première variable suffit. Pour tous $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda P + \mu Q|R) = \sum_{k=0}^n (\lambda P + \mu Q)(x_k)R(x_k) = \lambda \sum_{k=0}^n P(x_k)R(x_k) + \mu \sum_{k=0}^n Q(x_k)R(x_k) = \lambda(P|R) + \mu(Q|R).$$

Pour le caractère défini et la positivité, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $(P|P) = \sum_{k=0}^n P(x_k)^2 \geq 0$, et l'égalité n'a lieu que si $P(x_k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, i.e. si $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont des racines de P ; or dans ce cas P possède au moins $(n+1)$ racines distinctes tout en étant de degré au plus n , donc $P = 0$.

Exemple L'application $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

En effet Bilinéarité et symétrie sont évidentes. Pour le caractère défini et la positivité, soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Alors $(f|f) = \int_0^1 f(t)^2 dt \geq 0$, et l'égalité n'a lieu que si $f = 0$; en effet, l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si celle-ci est identiquement nulle.

✕✕✕ Attention ! Muni du produit scalaire défini ci-dessus, $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ n'est pas un espace euclidien car ce n'est pas un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. C'est seulement un espace préhilbertien réel.

1.2 NORME ET DISTANCE ASSOCIÉES À UN PRODUIT SCALAIRE

Définition (Norme) Soit E un espace préhilbertien réel de produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

- On appelle *norme (euclidienne) sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$* l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

- On appelle *distance (euclidienne) sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$* l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

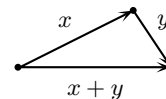
$$\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

✕✕✕ Attention ! La notion de distance n'est pas forcément celle que l'on croit ! La distance dépend d'un **choix** de produit scalaire. Par exemple, pour le produit scalaire $((x, y), (x', y')) \mapsto 3xx' + xy' + yx' + yy'$ sur $\mathbb{R}^2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3} \neq 1$.

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire) Soient E un espace préhilbertien réel et $x, y, z \in E$.

- (i) **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

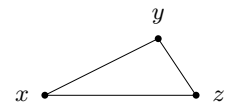
Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.



- (ii) **Inégalité triangulaire (version norme) :** $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

L'inégalité sur les normes est une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires de même sens.

Inégalité triangulaire (version distance) : $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.



✂ ✂ ✂ Explication En début d'année, nous n'avons même pas pris la peine d'énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz car elle était alors complètement triviale : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. Elle est à présent remarquable car nous avons défini le produit scalaire sans notion d'angle aucune, donc sans l'usage d'aucun cosinus.

Démonstration

- (i) On peut supposer $y \neq 0_E$ — sinon résultat trivial. La fonction $t \mapsto \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t(x|y) + t^2\|y\|^2$ est alors polynomiale de degré 2 et positive ou nulle, donc de discriminant négatif ou nul — soit pas de racine réelle, soit une racine double. L'inégalité de Cauchy-Schwarz découle alors de ce que le discriminant en question vaut $4[(x|y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2]$.

L'inégalité est une égalité si et seulement si le discriminant s'annule, i.e. si et seulement si $\|x + \lambda y\|^2 = 0$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui revient à dire que $x + \lambda y = 0_E$, ou encore que x et y sont colinéaires.

- (ii) La version distance est immédiate à partir de la version norme, et l'inégalité généralisée découle de l'inégalité triangulaire de base — si vous n'êtes pas convaincus, allez faire un tour dans notre chapitre sur les nombres complexes. Pour cette inégalité de base :

$$\|x + y\|^2 = (x + y|x + y) = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Un petit coup de racine carrée, et l'inégalité triangulaire est démontrée.

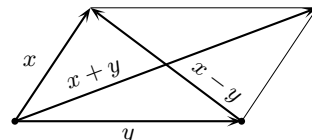
Cette preuve montre aussi que l'inégalité est une égalité si et seulement si $(x|y) = \|x\| \cdot \|y\|$. En particulier, dans ce cas, x et y sont colinéaires d'après (i). Quitte à permuter x et y , il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$. Aussitôt : $\lambda \|x\|^2 = (x|\lambda x) = (x|y) = \|x\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|^2$, de sorte que soit x est nul, soit $\lambda = |\lambda|$, i.e. $\lambda \geq 0$. Dans les deux cas x et y sont colinéaires *de même sens*. La réciproque est immédiate. ■

Théorème (Identités du parallélogramme et de polarisation) Soient E un espace préhilbertien réel et $x, y \in E$.

- (i) **Identité du parallélogramme :** $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
- (ii) **Identités de polarisation :** $(x|y) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.

🐞 🐞 🐞 Explication

L'identité du parallélogramme affirme que la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égal à la somme des carrés des longueurs de ses diagonales. Quant aux identités de polarisation, elles montrent que le produit scalaire est une fonction de la norme — alors qu'initialement c'est la norme qui est une fonction du produit scalaire.



Démonstration Faire joujou — addition, soustraction... — avec les relations « $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$ » et « $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$ ». ■

1.3 ORTHOGONALITÉ

Définition (Vecteur unitaire, vecteurs orthogonaux) Soient E un espace préhilbertien réel et $x, y, x_1, x_2, \dots, x_n \in E$.

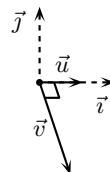
- On dit que x est *unitaire* (ou *normé*) si $\|x\| = 1$.
- On dit que x et y sont *orthogonaux* si $(x|y) = 0$; cette relation se note $x \perp y$.
- On dit que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est *orthogonale* si x_i et x_j sont orthogonaux pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts.
- On dit que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est *orthonormale* (ou *orthonormée*) si elle est orthogonale et si x_i est unitaire pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$; cela revient à dire que : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (x_i|x_j) = \delta_{ij}$, où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ (*symbole de Kronecker*).

🐞 🐞 🐞 **Explication** Ces définitions achèvent de mettre la géométrie la tête en bas : jusqu'ici, pour vous, la notion d'orthogonalité était première et le produit scalaire second. C'est le contraire qui est vrai à présent : la notion d'orthogonalité repose sur la définition préalable d'un produit scalaire. Cela implique en particulier qu'à tout produit scalaire correspond une notion d'orthogonalité. Les angles droits ne sont droits que relativement à la donnée d'un produit scalaire.

Exemple Pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale. C'est facile et important : **VÉRIFIEZ-LE SEUL IMPÉRATIVEMENT.**

Exemple

Pour le produit scalaire $((x, y), (x', y')) \mapsto 3xx' + xy' + yx' + yy'$ sur $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $\vec{u} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{3}}$ et $\vec{v} = \frac{\vec{i} - 3\vec{j}}{\sqrt{6}}$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Vérifiez-le ! Cela nous fait *apparemment* un drôle d'angle droit, mais vous devez considérer que c'en est bel et bien un : simplement votre œil n'est pas adapté à ce produit scalaire.



Exemple Les fonctions $t \mapsto 1$ et $t \mapsto \sin(2\pi t)$ sont orthogonales pour $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$ sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ car $\int_0^1 1 \times \sin(2\pi t) dt = \int_0^1 \sin(2\pi t) dt = \left[-\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi} \right]_{t=0}^{t=1} = 0$.

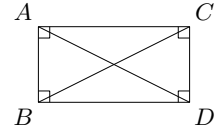
Théorème (Propriétés des familles orthogonales) Soient E un espace préhilbertien réel et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille orthogonale de E .

- (i) Si aucun des x_k n'est nul, k décrivant $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre.

(ii) **Théorème de Pythagore :** $\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$.

Explication

Mais quel rapport avec le théorème de Pythagore qu'on apprend au collège ? Au collège, on nous apprend que $BC^2 = AB^2 + AC^2$. A présent : $\|\vec{AB} + \vec{AC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2$, i.e. $AD^2 = AB^2 + AC^2$. Ces deux résultats n'en font qu'un, car évidemment $AD = BC$.



En pratique Grâce à (i), si vous voulez montrer que $\boxed{n}$ vecteurs donnés forment une **base** orthonormale en dimension $\boxed{n}$, il vous suffit de montrer que ces vecteurs forment une **famille** orthonormale.

Démonstration

(i) Supposons $x_k \neq 0_E$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E$. Fixons $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Alors : $0 = (0_E | x_i) = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \middle| x_i \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k | x_i) = \lambda_i \|x_i\|^2$. Or $x_i \neq 0_E$, donc $\|x_i\| \neq 0$, d'où $\lambda_i = 0$.

La famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est donc libre.

$$(ii) \quad \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k \middle| \sum_{l=1}^n x_l \right) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} (x_k | x_l) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} (x_k | x_l) = \sum_{k=1}^n (x_k | x_k) = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2. \quad \blacksquare$$

FAMILLES ORTHONORMALES

2.1 PROCÉDÉ D'ORTHONORMALISATION DE GRAM-SCHMIDT

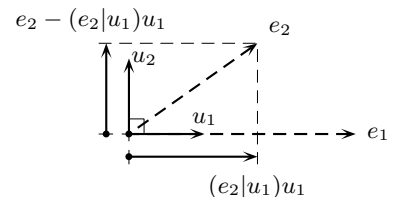
Théorème (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) Soient E un espace préhilbertien réel et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille **libre** de E . On peut transformer $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ en une famille orthonormale $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de E telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k).$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on n'a que deux choix possibles pour la construction de u_k : u_k est soit le vecteur $\frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k | u_i) u_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k | u_i) u_i \right\|}$, soit son opposé. La construction de u_k requiert donc la construction de $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$ (procédé itératif).

Explication Tâchons d'expliquer la chose avec des dessins dans le cas simple $n = 2$; car une fois qu'on a compris ce cas, on a tout compris. On veut transformer une famille libre quelconque (e_1, e_2) en une famille orthonormale (u_1, u_2) . Le théorème donne les formules suivantes : $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ et $u_2 = \frac{e_2 - (e_2 | u_1) u_1}{\|e_2 - (e_2 | u_1) u_1\|}$.

- 1) La première formule normalise e_1 , c'est-à-dire le rend unitaire.
- 2) La seconde commence par transformer e_2 en $e_2 - (e_2 | u_1) u_1$; cela revient à retrancher à e_2 sa « composante en u_1 », qui vaut $(e_2 | u_1) u_1$. Le vecteur ainsi obtenu est orthogonal à u_1 . Mais il peut ne pas être unitaire : c'est pourquoi on le divise par sa norme.



Démonstration

- La construction commence simplement. La famille (e_1) est libre, donc $e_1 \neq 0_E$, et donc on peut poser $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$. Il est clair que $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(u_1)$.
- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Supposons qu'on ait réussi à construire une famille orthonormale $(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$ telle que $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ pour tout $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$. Nous sommes en quête d'un vecteur u_k tel que :
 - 1) $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ est orthonormale ;
 - 2) $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.
- **Analyse :** Faisons l'hypothèse qu'un tel vecteur u_k existe. A quoi ressemble-t-il ? Pour commencer, u_k est combinaison linéaire de $e_1, e_2, \dots, e_k$ car $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$; mais comme aussi $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{k-1}) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$, u_k est en fait combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, e_k$, de sorte que pour certains $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{kk} \in \mathbb{R}$: $u_k = a_{kk} e_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} u_i$.

Dans ces conditions, pour tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, sachant que $u_k \perp u_i$:

$$0 = (u_k | u_i) = \left(a_{kk} e_k + \sum_{j=1}^{k-1} a_{jk} u_j \middle| u_i \right) = a_{kk} (e_k | u_i) + \sum_{j=1}^{k-1} a_{jk} (u_j | u_i) = a_{kk} (e_k | u_i) + a_{ik},$$

ou encore : $a_{ik} = -a_{kk} (e_k | u_i)$. Ceci montre que : $u_k = a_{kk} \hat{u}_k$, où $\hat{u}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k | u_i) u_i$.

Mais enfin $\|u_k\| = 1$ par hypothèse, donc $|a_{kk}| = \frac{1}{\|\hat{u}_k\|}$, i.e. $a_{kk} = \frac{\pm 1}{\|\hat{u}_k\|}$. Finalement, nous venons de montrer que $u_k = \pm \frac{\hat{u}_k}{\|\hat{u}_k\|}$; le vecteur u_k , s'il existe, est donc complètement déterminé par la donnée de $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$ et e_k , au signe près.

- **Synthèse** : Réciproquement, commençons par poser $\hat{u}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k | u_i) u_i$.

Peut-on avoir $\hat{u}_k = 0_E$? Si ce vecteur était nul, e_k serait combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$, et donc de $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ puisque $\mathbf{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{k-1}) = \mathbf{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$. Cela contredirait la liberté de la famille $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ donnée initialement.

Puisque $\hat{u}_k \neq 0_E$, nous pouvons donc poser $u_k = \frac{\hat{u}_k}{\|\hat{u}_k\|}$ — on pourrait choisir $u_k = -\frac{\hat{u}_k}{\|\hat{u}_k\|}$.

1) Montrons que $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ est orthonormale. Comme $(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$ l'est par hypothèse de récurrence, nous devons juste montrer que u_k est unitaire et orthogonal aux vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$. Le caractère unitaire de u_k est limpide. Pour les orthogonalités, pour tout $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$:

$$(u_k | u_j) = \frac{1}{\|\hat{u}_k\|} (\hat{u}_k | u_j) = \frac{1}{\|\hat{u}_k\|} \left(e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k | u_i) u_i \middle| u_j \right) = \frac{1}{\|\hat{u}_k\|} \left((e_k | u_j) - (e_k | u_j) (u_j | u_j) \right) = 0.$$

2) Dans la mesure où $\mathbf{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{k-1}) = \mathbf{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$, et puisque u_k est combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$ et e_k , alors $\mathbf{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \mathbf{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$. ■

Exemple L'application $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, et quand on orthonormalise la famille **libre** $(1, X, X^2)$ au moyen de l'algorithme de Gram-Schmidt, on obtient la famille **orthonormale** $(1, \sqrt{3}(2X-1), \sqrt{5}(6X^2-6X+1))$.

En effet Il s'agit de construire une famille orthonormale (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ à partir de $(1, X, X^2)$.

- **Construction de P_0** : Posons $P_0 = \frac{1}{\|1\|}$. Comme $\|1\|^2 = \int_0^1 dt = 1$, en fait $P_0 = 1$.
- **Construction de P_1** : Posons $P_1 = \frac{X - (X|P_0)P_0}{\|X - (X|P_0)P_0\|}$. Puisque $(X|P_0) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$, le polynôme au numérateur est en fait $X - (X|P_0)P_0 = X - \frac{1}{2}$. Mais $\left\|X - \frac{1}{2}\right\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12} = \frac{1}{(2\sqrt{3})^2}$, donc $P_1 = \sqrt{3}(2X-1)$. Alors (P_0, P_1) est une famille orthonormale.
- **Construction de P_2** : Posons $P_2 = \frac{X^2 - (X^2|P_0)P_0 - (X^2|P_1)P_1}{\|X^2 - (X^2|P_0)P_0 - (X^2|P_1)P_1\|}$. Puisque $(X^2|P_0) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ et $(X^2|P_1) = \int_0^1 t^2 \times \sqrt{3}(2t-1) dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, le polynôme $X^2 - (X^2|P_0)P_0 - (X^2|P_1)P_1$ au numérateur est en fait le polynôme $X^2 - X + \frac{1}{6}$. Mais par ailleurs $\left\|X^2 - X + \frac{1}{6}\right\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{180} = \frac{1}{(6\sqrt{5})^2}$, donc $P_2 = \sqrt{5}(6X^2-6X+1)$. Alors (P_0, P_1, P_2) est une famille orthonormale.

Corollaire (Existence de bases orthonormales en dimension finie) Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien. Alors E possède une base orthonormale.

Démonstration Comme E est de dimension finie non nulle, E possède une base, et donc une base orthonormale en vertu du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt — famille (libre) orthonormale avec le bon nombre de vecteurs... ■

Corollaire (Théorème de la base orthonormale incomplète en dimension finie) Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E .

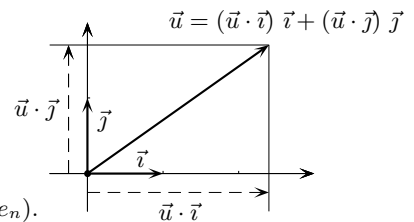
Démonstration Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille orthonormale de E . Alors $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est libre. Or E est de dimension finie non nulle, donc on peut compléter $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ en une base de E . On peut ensuite transformer cette base en une base orthonormale au moyen du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Ce procédé n'affecte pas les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$ qui forment déjà une famille orthonormale, et nous avons donc complété notre famille de départ en une base orthonormale de E . ■

2.2 COORDONNÉES DANS UNE BASE ORTHONORMALE

Théorème (Coordonnées dans une base orthonormale) Soient $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et $x \in E$.

Alors : $x = \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k$. En d'autres termes, les coordonnées de x dans $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ sont $((x|e_1), (x|e_2), \dots, (x|e_n))$.

⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Ce résultat est bien connu en principe dans le plan et dans l'espace.



Démonstration Notons $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $(x|e_k) = \left(\sum_{l=1}^n x_l e_l \middle| e_k \right) = \sum_{l=1}^n x_l (e_l|e_k) = \sum_{l=1}^n x_l \delta_{kl} = x_k$. Et voilà. ■

Théorème (Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale) Soient $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien et $x, y \in E$ de coordonnées respectives $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans une certaine base orthonormale de E . Alors :

$$(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

En termes matriciels, si X est la colonne des coordonnées de x et Y celle des coordonnées de y :

$$(x|y) = {}^t X Y \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{{}^t X X}.$$

⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Ce résultat montre que finalement, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est un modèle pour tous les produits scalaires des espaces euclidiens. Calculer le produit scalaire $(x|y)$ dans un espace euclidien abstrait revient à calculer le produit scalaire canonique des coordonnées des vecteurs x et y dans une base orthonormale fixée quelconque.

⚡ ⚡ ⚡ **Attention !** Ces formules sont fausses si la base dans laquelle les coordonnées sont données n'est pas orthonormale.

Démonstration Notons $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base orthonormale considérée.

$$(x|y) = \left(\sum_{k=1}^n x_k e_k \middle| \sum_{l=1}^n y_l e_l \right) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} x_k y_l (e_k|e_l) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} x_k y_l \delta_{kl} = \sum_{1 \leq k, l \leq n} x_k y_l = \sum_{k=1}^n x_k y_k = {}^t X Y. \quad \blacksquare$$

3 ORTHOGONALITÉ ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

3.1 SOUS-ESPACES VECTORIELS ORTHOGONAUX

Définition (Sous-espaces vectoriels orthogonaux) Soient E un espace préhilbertien réel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont *orthogonaux* si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G , i.e. si :

$$\forall f \in F, \quad \forall g \in G, \quad (f|g) = 0. \quad \text{Cette relation se note } F \perp G.$$

Exemple Dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont orthogonales car pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\left((0, y) \middle| (x, 0)\right) = 0 \times x + y \times 0 = 0$.

3.2 ORTHOGONAL D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

Définition (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel) Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E .

- On appelle *orthogonal de F dans E* , noté $F^\perp$, l'ensemble $\left\{x \in E \middle| \forall f \in F, (x|f) = 0\right\}$.
- Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E orthogonal à F .
- Les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont en somme directe, i.e. $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.
- On a l'inclusion suivante : $F \subseteq F^{\perp\perp}$.

××× Attention ! Si E est un espace préhilbertien réel quelconque, il n'est pas vrai en général que F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E , ils sont seulement en somme directe ; bref, on n'a pas forcément $E = F + F^\perp$. De même, on n'a pas forcément $F^{\perp\perp} = F$. Nous verrons cependant que ces résultats sont vrais si F est de dimension finie, donc en particulier si E est euclidien.

Démonstration

- Montrons que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
 - 1) Déjà $0_E \in F^\perp$ car : $\forall f \in F, (0_E|f) = 0$.
 - 2) Soient $x, y \in F^\perp$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $f \in F$: $(\lambda x + \mu y|f) = \lambda(x|f) + \mu(y|f) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$. Ceci montre bien que $\lambda x + \mu y$ est orthogonal à tout vecteur de F , i.e. que $\lambda x + \mu y \in F^\perp$.
- Montrons que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Soit $x \in F \cap F^\perp$. Alors $\left(\overbrace{x}^{\in F} \middle| \overbrace{x}^{\in F^\perp}\right) = 0$, et donc $x = 0_E$ en vertu du caractère défini du produit scalaire.
- Montrons que $F \subseteq F^{\perp\perp}$. Soit $f \in F$. Montrer que $f \in F^{\perp\perp}$, c'est montrer que f est orthogonal à tout vecteur de $F^\perp$. Or pour tout $x \in F^\perp$, f et x sont orthogonaux puisque $f \in F$ et $x \in F^\perp$. Il est donc bien vrai que $f \in F^{\perp\perp}$. ■

Exemple Si E est un espace préhilbertien réel, $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$. La seconde égalité énonce une vérité simple et importante : le seul vecteur de E orthogonal à tous les vecteurs de E est 0_E .

En effet

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur, donc $E \subseteq \{0_E\}^\perp$. L'inclusion inverse est une évidence.
- En tant que sous-espace vectoriel de E , $E^\perp$ contient 0_E . Inversement, soit $x \in E^\perp$. Alors x est orthogonal à tout vecteur de E , donc en particulier à lui-même : $(x|x) = 0$, i.e. $\|x\| = 0$. On obtient aussitôt $x = 0_E$ en vertu du caractère défini du produit scalaire.

Exemple Pour le produit scalaire $(P, Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathbb{R}_0[X]^\perp = \mathbf{Vect}(X, 3X^2 - 2)$.

En effet Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}
 P \in \mathbb{R}_0[X]^\perp &\iff \forall \lambda \in \mathbb{R}, (P|\lambda) = 0 &\iff (P|1) = 0 &\text{ par linéarité du produit scalaire} \\
 &\iff (a - b + c) + c + (a + b + c) = 0 \\
 &\iff 2a + 3c = 0. && \text{ On en déduit le résultat voulu.}
 \end{aligned}$$

Théorème (Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie) Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

(i) Il existe un et un seul supplémentaire de F dans E orthogonal à F : c'est $F^\perp$, appelé par conséquent le supplémentaire orthogonal de F dans E .

(ii) On a l'égalité suivante : $F^{\perp\perp} = F$.

✕✕✕ Attention !

- L'hypothèse que F est de dimension finie est essentielle. Dans le cas général, nous avons vu que F et $F^\perp$ sont en somme directe et que $F \subseteq F^{\perp\perp}$, mais rien de plus a priori. On n'a pas forcément $E = F + F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$.
- Il existe un unique supplémentaire orthogonal, mais tout plein de supplémentaires « généraux », ne l'oubliez pas.

Démonstration

(i) Nous savons déjà que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

• Montrons que $E = F + F^\perp$, i.e. que $E \subseteq F + F^\perp$. Nous pouvons supposer $F \neq \{0_E\}$ car $\{0_E\} + \{0_E\}^\perp = \{0_E\} + E = E$. Introduisons alors une base orthonormale $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de F , puisque par hypothèse F est de dimension finie. Soit $x \in E$. Posons $f = \sum_{k=1}^n (x|f_k) f_k$. Il est facile de vérifier que $x - f$ est orthogonal à $f_1, f_2, \dots, f_n$, i.e. que $x - f \in F^\perp$. Cela montre bien que $x \in F + F^\perp$.

• Montrons que $F^\perp$ est le seul supplémentaire de F dans E orthogonal à F . Soit F' un tel supplémentaire. Alors $F \perp F'$ donc $F' \subseteq F^\perp$. Pour l'inclusion réciproque, fixons $x \in F^\perp$. Puisque $E = F + F'$, il existe $f \in F$ et $f' \in F'$ tels que $x = f + f'$. Or $f \in F^\perp$ et $F \perp F'$, donc $0 = (x|f) = (f + f'|f) = (f|f)$. Ainsi $f = 0_E$, i.e. $x = f' \in F'$.

(ii) Nous savons déjà que $F \subseteq F^{\perp\perp}$. Pour l'inclusion réciproque, fixons $x \in F^{\perp\perp}$. Puisque $E = F + F^\perp$, il existe $f \in F$ et $f' \in F^\perp$ tels que $x = f + f'$. Or $x \in F^{\perp\perp}$ donc $0 = (x|f') = (f + f'|f') = (f'|f')$. Ainsi $f' = 0_E$, i.e. $x = f \in F$. ■

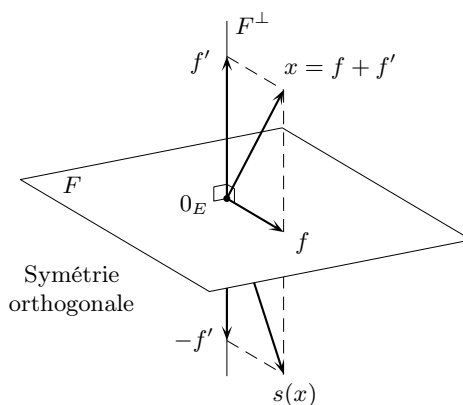
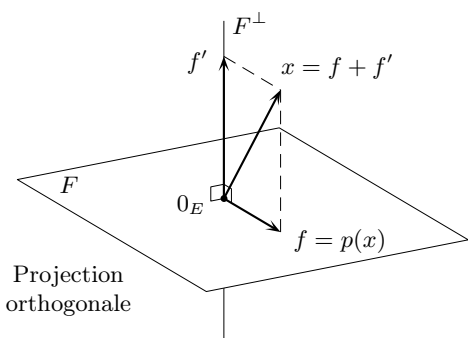
4 PROJECTEURS ORTHOGONAUX

4.1 PROJECTEURS ORTHOGONAUX ET SYMÉTRIES ORTHOGONALES

Définition (Projecteur orthogonal, symétrie orthogonale) Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

- On appelle *projection orthogonale sur F* ou *projecteur orthogonal sur F* la projection sur F de direction $F^\perp$.
- On appelle *symétrie orthogonale par rapport à F* la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$. On parle plutôt de *réflexion par rapport à F* si F est un hyperplan de E .

🐞 🐞 🐞 **Explication** Comme F est de dimension finie, $E = F \oplus F^\perp$.



Théorème (Expression d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormale) Soient E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle de E , $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base orthonormale de F et p le projecteur orthogonal sur F .

Alors pour tout $x \in E$:
$$p(x) = \sum_{k=1}^n (x|f_k) f_k.$$

🐞 🐞 🐞 **Explication** Dans ce résultat, « $(x|f_k) f_k$ » représente la composante de x selon le vecteur f_k , et $p(x)$ est la somme de toutes ces composantes.

Démonstration Soit alors $x \in E$. Le vecteur $x - \sum_{k=1}^n (x|f_k)f_k$ est orthogonal à $f_1, f_2, \dots, f_n$, donc à F tout entier, donc appartient à $F^\perp$. Ainsi $x = \sum_{k=1}^n (x|f_k)f_k + \left(x - \sum_{k=1}^n (x|f_k)f_k\right)$. Ceci prouve bien que $p(x) = \sum_{k=1}^n (x|f_k)f_k$, si l'on veut bien se souvenir de ce qu'est une projection par définition. ■

Exemple On note F le sous-espace vectoriel $\mathbf{Vect}(\sin, \cos)$ de $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Le projeté orthogonal de l'identité Id sur F pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$ est la fonction $t \mapsto 2 \sin t$.

En effet

- Commençons par déterminer une base orthonormale de F au moyen de l'algorithme de Gram-Schmidt. Il convient de remarquer au préalable que $(\sin, \cos)$ est une base de F — pourquoi d'ailleurs ?

1) Tout d'abord : $\|\sin\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = \pi$. Notons alors f_0 la fonction $t \mapsto \frac{\sin}{\sqrt{\pi}}$, de sorte que $\|f_0\| = 1$.

2) Ensuite : $(\cos|f_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t \sin t}{\sqrt{\pi}} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2t)}{2\sqrt{\pi}} dt = \left[-\frac{\cos(2t)}{4\sqrt{\pi}} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0$. On montre comme en 1) que $\|\cos\|^2 = \pi$. Posons alors $f_1 = \frac{\cos}{\sqrt{\pi}}$. Alors (f_0, f_1) est une base orthonormale de F .

- Pour déterminer le projeté orthogonal de f sur F , nous devons calculer $(\text{Id}|f_0)$ et $(\text{Id}|f_1)$.

Or : $\int_{-\pi}^{\pi} t e^{it} dt = \left[t \times (-i)e^{it} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (-i)e^{it} dt = 2i\pi + i \left[(-i)e^{it} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = 2i\pi + 0 = 2i\pi$.

Du coup, $(\text{Id}|f_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t \sin t}{\sqrt{\pi}} dt = \frac{\text{Im}(2i\pi)}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\pi}$ et $(\text{Id}|f_1) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t \cos t}{\sqrt{\pi}} dt = \frac{\text{Re}(2i\pi)}{\sqrt{\pi}} = 0$.

Enfin, le projeté orthogonal de Id sur F est la fonction $(\text{Id}|f_0)f_0 + (\text{Id}|f_1)f_1 = 2\sqrt{\pi}f_0$, i.e. $t \mapsto 2 \sin t$.

Exemple Soient E un espace préhilbertien réel, $a \in E$ non nul et $H = \mathbf{Vect}(a)^\perp$ l'unique hyperplan de E orthogonal à a . Si p est le projecteur orthogonal sur H et si r est la réflexion par rapport à H , alors pour tout $x \in E$:

$$p(x) = x - \frac{(a|x)a}{\|a\|^2} \quad \text{et} \quad r(x) = x - \frac{2(a|x)a}{\|a\|^2}.$$

En effet Notons p' la projection orthogonale sur $\mathbf{Vect}(a)$. Alors $p+p' = \text{Id}_E$ et $\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ est une base orthonormale

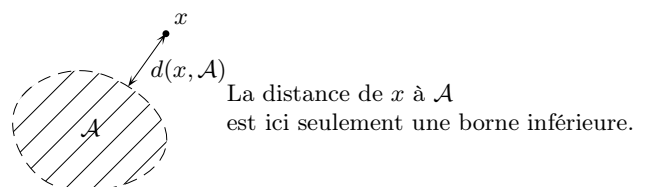
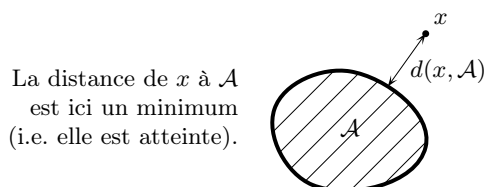
de $\mathbf{Vect}(a)$. On a donc : $\forall x \in E, \quad p'(x) = \left(x \left| \frac{a}{\|a\|} \right.\right) \frac{a}{\|a\|} = \frac{(x|a)a}{\|a\|^2}$, d'où l'expression de p .

Pour l'expression de r , il suffit d'observer que $r = 2p - \text{Id}_E$.

4.2 DISTANCE À UN SOUS-ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE

Définition (Distance à une partie) Soient E un espace préhilbertien réel, $\mathcal{A}$ une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle *distance de x à $\mathcal{A}$* , notée $d(x, \mathcal{A})$, le réel : $d(x, \mathcal{A}) = \inf_{a \in \mathcal{A}} d(x, a)$.

☞ ☞ ☞ **Explication** Intuitivement, la distance d'un vecteur x à une partie $\mathcal{A}$ est la plus petite distance séparant x d'un élément de $\mathcal{A}$. Mais comment savoir si une telle « plus petite distance » existe ? En fait, elle n'existe pas nécessairement et c'est pourquoi on n'a surtout pas posé « $d(x, \mathcal{A}) = \min_{a \in \mathcal{A}} d(x, a)$ ».

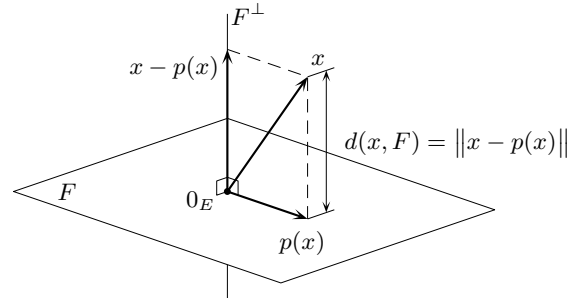


Démonstration Le réel $d(x, \mathcal{A})$ est bien défini en vertu de la propriété de la borne inférieure, car l'ensemble $\left\{d(x, a)\right\}_{a \in \mathcal{A}}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car $\mathcal{A} \neq \emptyset$) et minorée (par 0). ■

Théorème (Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie) Soient E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et p le projecteur orthogonal sur F . Soit en outre $x \in E$.

• Alors : $d(x, F) = \|x - p(x)\| = d(x, p(x))$.
La distance de x à F est donc un minimum. Ce minimum n'est atteint qu'en la projection orthogonale de x sur F .

• Par ailleurs : $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2$.



Démonstration

• Par définition de p , nous savons que $p(x) \in \text{Im } p = F$ et que $x - p(x) \in \text{Ker } p = F^\perp$.

Soit alors $f \in F$. On a : $x - f = \underbrace{(x - p(x))}_{\in F^\perp} + \underbrace{(p(x) - f)}_{\in F}$. Le théorème de Pythagore montre aussitôt que $\|x - f\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2$.

• Montrons à présent que $d(x, F) = \|x - p(x)\| = d(x, p(x))$. Pour ce faire, notons $\mathcal{D}$ l'ensemble $\{d(x, f)\}_{f \in F}$.

1) Alors $\|x - p(x)\| = d(x, p(x)) \in \mathcal{D}$ car $p(x) \in F$.

2) Mais de plus pour tout $f \in F$: $d(x, f) = \|x - f\| = \sqrt{\|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2} \geq \|x - p(x)\|$, donc $\|x - p(x)\|$ est un minorant de $\mathcal{D}$.

Ainsi $d(x, p(x))$ est le plus petit élément de $\mathcal{D}$, donc aussi sa borne inférieure, ce qui montre le résultat voulu.

• Soit $f \in F$ distinct de $p(x)$. Alors $\|p(x) - f\| > 0$, donc $d(x, f) = \sqrt{\|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2} > \|x - p(x)\|$. Ceci montre que la distance $d(x, F)$ n'est atteinte qu'en $p(x)$. ■

5 REPRÉSENTATION DES FORMES LINÉAIRES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Théorème (Représentation des formes linéaires d'un espace euclidien) Soient E un espace euclidien et f une forme linéaire de E . Il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que : $\forall x \in E, f(x) = (a|x)$.

🐞 🐞 🐞 **Explication** Quelle interprétation géométrique ? Nous savons que la donnée d'un hyperplan H équivaut à la donnée d'une forme linéaire non nulle f . Du coup, à présent, la donnée d'un hyperplan équivaut donc à la donnée d'un vecteur non nul a , avec : $H = \text{Ker } f = \{x \in E / (a|x) = 0\} = \text{Vect}(a)^\perp$. Géométriquement, a est donc un vecteur normal à H .

❌ ❌ ❌ **Attention !** L'hypothèse que E est euclidien, i.e. de dimension finie, n'est pas là pour décorer !

Démonstration Nous allons montrer que l'application linéaire $\phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & (x \mapsto (a|x)) \end{cases}$ est un isomorphisme. La bijectivité de ϕ n'est autre que le résultat voulu. Mais comme $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \dim E \times \dim \mathbb{R} = \dim E$, il nous suffit en fait de montrer que ϕ est injective, i.e. que $\text{Ker } \phi = \{0_E\}$. Soit $a \in \text{Ker } \phi$. Alors $(a|x) = 0$ pour tout $x \in E$. En particulier, $\|a\|^2 = (a|a) = 0$, et donc $a = 0_E$. ■

Exemple Soit f une forme linéaire de $\mathbb{R}^n$. Nous savons qu'il existe des coefficients uniques $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

Le théorème est ici clair ; pour $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$: $\forall X \in \mathbb{R}^n, f(X) = (A|X) = {}^t A X$.